2019

Kenny Minh Tam Le, George Dawood & Nikolaj Simon Sørensen

Aarhus Gymnasium

07-04-2019

Matematik - Projekt broer

Indhold

[Problemformulering 2](#_Toc6849350)

[Matematisk indhold 2](#_Toc6849351)

[*Opgave 1 - Alssundbroen* 2](#_Toc6849352)

[a) Bestem en ligning for cirklen, som indeholder buen DE 4](#_Toc6849353)

[b) Bestem koordinatsættet for punktet E 5](#_Toc6849354)

[c) Bestem længden af buestykket DE 5](#_Toc6849355)

[d) Bestem en ligning for hver af de rette linjer, der indeholder henholdsvis linjestykkerne EF og CD 6](#_Toc6849356)

[e) Bestem koordinaterne til punkterne F og C 7](#_Toc6849357)

[f) Bestem radius i cirklerne (, der indeholder buerne BC og FG 8](#_Toc6849358)

[g) Bestem længden af hele vejlinjen fra A til H 9](#_Toc6849359)

[Opgave 2 - Bro i Aarhus 12](#_Toc6849360)

[Konklusion 14](#_Toc6849361)

[Formeloversigt 14](#_Toc6849362)

[Litteraturliste 14](#_Toc6849363)

# Problemformulering

Denne opgave indeholder besvarelser på en række spørgsmål om broer. I opgave 1 regner vi på Alssundbroen, og i opgave 2 regner vi på en bro over Aarhus Å. Formålet med rapporten er at anvende analytisk plangeometri til at besvare de givne spørgsmål.

# Matematisk indhold

## Opgave 1 - Alssundbroen



Figur 1 - skematisk tegning af broen med tilkørselsveje set fra side



Figur 2 - Vejens opbygning af cirkler og linjestykker

For broen gælder det at:

*Vejen er symmetrisk om y-aksen*

*Vandoverfladen svarer til x-aksen*

*Højden af broen (y-koordinaten) er 36.8 meter*

*AB, CD, EF og GH er rette linjestykker.*

*BC, DE, FG er cirkelbuer.*

*y-koordinaterne til punkterne F og G er ens.*

*Radius i midtercirklen er 8000 meter.*

*I overgangen mellem linje og cirkel er linjen en tangent til cirklen*

### Bestem en ligning for cirklen, som indeholder buen DE

Cirklen, som indeholder buen DE svarer til den røde cirkel på nedenstående billede.



Figur 3 - Illistration af hvilken cirkels ligning, der skal findes

Generelt for cirklers ligning gælder det at:

Der kendes kun radius, som på forhånd i opgavebeskrivelsen er givet ved . Nu mangler kun centrum for at kunne bestemme cirklens ligning.

Som det kan aflæses på figur 1, ligger centrum på y-aksen. Det vil sige at . Centrums y-værdi kan findes da broens højde over vandoverfladen kendes idét den er meter. Radius kendes også, . Den kan bruges da den går fra centrum til broens højde, altså er og broens højde over hinanden, og har samme x-værdi. Y-værdien af svarer derfor til broens højde over vandet minus cirklens radius, hvilket illustrativt svarer til at finde den grønne linje, som svarer til den røde linje minus den gule linje på nedenstående figur.



Figur 4 - Illustration af linjerne for cirkel 2

Y-værdien af bestemmes altså således:

Nu kendes hele centrums y-koordinat

Centrum og radius indsættes i cirklens ligning for at finde den endelige ligning for cirklen:

**Det kan på baggrund af ovenstående beregninger konkluderes at ligningen for cirklen, der indeholder buen DE er**

### Bestem koordinatsættet for punktet E

Det aflæses at

For at få y, kan den isoleres i cirklens ligning, som vi fandt i ovenstående opgave. Det kan den fordi E ligger på cirkelperiferien.

Der er følgende ligning for cirklen fra opg. A:

Den kendte værdi, E’s x-værdi, indsættes:

*Ligningen løses for y vha. CAS-værktøjet WordMat.*

**Det kan på baggrund af ovenstående beregninger konkluderes at punkt )**

### Bestem længden af buestykket DE

Længden af buestykket defineres ved:

Radius kendes, men ikke vinklen. Vinklen fås ved at omskrive formlen for kordelængden

Kordelængden er dog ikke kendt, men da vi ved at den svarer til afstanden fra D til E kan afstandsformlen bruges. Da tegningen er symmetrisk over y-aksen, ved vi at D’s koordinatsæt er det samme som E’s koordinatsæt , bare med negativt x-koordinat. .

Afstanden findes vha. afstandsformlen:

De kendte værdier indsættes og stykket regnes:

Korden er derfor 544 og vinklen kan derfor findes:

Den nyfundne vinkel kan derfor plottes ind i formlen for buestykket og længden af buestykke DE bestemmes:

**Det kan på baggrund af ovenstående beregninger konkluderes at længden af buestykket DE er 544.1 meter**

### Bestem en ligning for hver af de rette linjer, der indeholder henholdsvis linjestykkerne EF og CD

Det er givet at og er rette linjestykker. Derfor er de på formen .

Det vides at er vinkelret på - linjerne er ortogonale og det gælder derfor at

. Dog skal først findes. Det vides fra de forrige opgaver at:

For at finde hældningskoefficienten til en linje mellem 2 punkter bruges formlen:

De kendte værdier indsættes:

Da nu kendes, kan bestemmes vha. følgende formel:

Den kendte værdi sættes ind:

Hældningskoefficienten for den rette linje, der indeholder linjestykket EF kendes nu. Nu mangles blot skæringspunktet med y-aksen, som kan findes med nedenstående formel da både hældningskoefficienten og et punkt på linjen kendes:

De kendte værdier er:

De kendte værdier indsættes i formlen:

*Ligningen løses for y vha. CAS-værktøjet WordMat.*

Ovenstående er altså ligningen for den rette linje, der indeholder linjestykket .

Da tegningen er symmetrisk over y-aksen, ved vi at den rette linje, der indeholder linjestykket må have det samme skæringspunkt med y aksen, men med omvendt hældningskoefficient som linjestykket der indeholder linjestykket |EF|, derfor:

**Det kan på baggrund af ovenstående beregninger konkluderes at linjen, der indeholder linjestykket |EF| har forskriften og at linjen, der indeholder linjestykket |CD| har forskriften**

### Bestem koordinaterne til punkterne F og C

Da x-koordinaten til punktet F og forskriften for kendes, kan x-koordinaten indsættes i forskriften for at finde y-koordinaten. Dermed er F koordinaten bestemt.

har forskriften:

Det aflæses, at x-koordinaten til punkt F er 500. Det indsættes i ovenstående funktionsforskrift for at få y-koordinaten til punkt F:

Nu kendes begge koordinater til punkt F:

Da tegningen er symmetrisk over y-aksen, har punkt C det samme koordinater, men med negativt x-koordinat:

**Det kan på baggrund af ovenstående beregninger konkluderes at og**

### Bestem radius i cirklerne (, der indeholder buerne BC og FG

For at finde blev forskriften for i førstekvadranten fundet. Derefter blev koordinatsæt bestemt vha. forskriften for . Til sidst blev afstanden mellem og F bestemt, hvilket svarer til .

har forskriften:

I opgaven er det givet at er vinkelret på |. For ortogonale linjer gælder det at:

*Ligningen løses for a\_r1 vha. CAS-værktøjet WordMat.*

Det vides nu at hældningskoefficienten til .

Da både et punkt på og hældningskoefficienten til kendes, kan ’s skæring med y-aksen findes, da det er den eneste ting, der mangler i forskriften for en linær linje:

De kendte værdier er:

De kendte værdier indsættes i forskriften for en lineær linje, og wordmat isolerer b, som er ’s skæring med y-aksen:

*The equation is solved for b by WordMat.*

Forskriften for i førstekvadranten er altså:

I opgaven er det givet at punkt F og G har samme y-koordinat. Derfor er afstanden mellem de 2 punkter F’s x-koordinat trukket fra G’s x-koordinat:

Da afstand mellem punkt F og G kendes, kan midtpunktet mellem F og G bestemmes, da F’s x-koordinat kendes og F og G har samme y-koordinat. Det vil sige at:

De kendte værdier er:

De kendte værdier indsættes i førnævnte formel:

svarer til ’s x-værdi.

Denne x-værdi, 840, kan sættes ind i formlen for i førstekvadranten for at finde y-koordinaten til .

De vides nu at

Da koordinaterne til både og F kendes, kan regnes vha. afstandsformlen:

De kendte værdier er:

De kendte værdier indsættes i afstandsformlen:

**Det kan på baggrund af ovenstående beregninger konkluderes at radius i cirklerne,**

### Bestem længden af hele vejlinjen fra A til H

For at finde længden af hele vejlinjen fra A til H, kan længden af vejlinjen i første kvadrant findes og fordobles, da tegningen er symmetrisk over y-aksen. Fordi buestykke DE spænder over begge kvadranter, deles de i 2. Derfor fås formlen:

Fra de forrige opgaver vides det allerede, at:

Derfor mangles .

findes:

Det vides allerede at:

For at finde afstanden mellem punkterne, anvendes afstandsformlen:

De kendte værdier indsættes:

Buestykke FG findes:

*(Samme metode som i opgave c)*

Længden af buestykket defineres ved:

, vinklen kendes ikke. Vinklen fås ved at omskrive formlen for kordelængden:

De kendte værdier er:

(kendes fra mellemregninger i opgave f)

(facit opgave f)

De kendte værdier indsættes og stykket regnes:

Den nyfundne vinkel kan plottes ind i formlen for buestykket:

|GH| findes:

For at finde |GH|, skal begge punkter kendes. Lige nu kendes kun G. Men da || står ortogonalt ind på |GH|, og både og G kendes, kan både hældningskoefficienten til |GH| og || findes:

Ved ortogonale linjer gælder det at:

*Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMat.*

Da der kendes både et punkt på |GH| (G) og |GH|’s hældningskoefficient, kan |GH|’s skæring med y-aksen findes. De kendte værdier er:

De kendte værdier indsættes i forskriften for den rette linje, og skæringspunktet med y-aksen, b, findes:

*Ligningen løses for b vha. CAS-værktøjet WordMat.*

Dermed kendes hele forskriften for |GH|:

Dernæst kan punkt H findes da dens x-koordinat er kendt og forskriften for |GH| kendes:

Sidst kan afstandsformlen anvendes da både punkt G og H kendes.

Længden af hele vejlinjen findes:

Da alle stykker af vejen kendes, kan længden af vejlinje AH regnes vha. nedenstående formel:

De kendte værdier er:

De kendte værdier indsættes i formlen:

**Det kan på baggrund af ovenstående beregninger konkluderes at længden af vejlinjen fra A til H er ca. 2800.96 meter**

# Opgave 2 - Bro i Aarhus

1. Udvælg en bro over Aarhus Å

Vi har udvalgt følgende bro over Aarhus Å:



Broen har følgende mål:

* Træplader (man går på): 129 styk
  + Bredde af træplader: 4 meter
  + Længde af træplader: 0.21 meter
  + Dybden på træplader: 0.02 meter
* Træstolper (som gelænder): 342 styk
  + Højde på stolperne: 1.32 meter
  + Bredde på stolperne: 0.17 meter
  + Dybde på stolper: 0.02 meter
* Broen
  + Længde: 29,3 meter
  + Bredde: 4,1 meter
  + Over vandoverfladen (højeste punkt): 3,45 meter

1. Diskuter hvilke spørgsmål man kan stille sig, hvis man vil beskrive broen matematisk

Vi har snakket om følgende spørgsmål, det ville være interessant at besvare:

1. Hvad kostede det at skabe broen?
2. Hvor meget kostede alt træet på broen?
3. Hvor meget buer broen?
4. Er der plads nok til at en båd kan sejle under broen? En kano?
5. Diskuter om og hvordan spørgsmålene kan besvares

*(Diskussion i samme rækkefølge som spørgsmålene er skrevet i opgave b))*

1. Vi kan kun give et kvalificeret gæt, da der er et hav af faktorer, vi ikke kender. Vi ved f.eks. ikke hvor meget det kostede i arbejdskraft at bygge broen, at designe broen og at ryde naturen væk for at kunne lave plads til broen. Vi kan dog finde ud af hvilke fagpersoner, der skal bruges til at lave en bro og finde deres gennemsnittelige lønningerne online. Det ville dog være ret vanskeligt, da vi ingen idé har om hvor lang tid det ville tage at bygge og designe broen, medmindre vi spurgte fagpersonerne.
2. Da vi har antal på alle materialerne af træ, ville vi kunne give et bud. Men da vi ikke kender træsorten ville det blive svært. For at løse opgaven, ville vi skulle finde rumfanget af alt træet på broen og prisen på trykimprægneret træ, som minder om det på broen.
3. For at bestemme hvor meget broen buer, skal vi først antage at broen buer lige meget alle stedet, altså at broen er en del af en cirkel. Derudover skal vi kende til den fiktive radius, broen ville have hvis den var en reel cirkel. Vi skulle også kende til broens længde, hvilket vi gør - 29,3 meter, *eller* broens korde. Da ville vi kunne bruge hhv. formlen for længden af en cirkelbue med isoleret eller formlen for kordelængden med isoleret.
4. Først og fremmest skal vi vide hvor langt broen er fra vandoverfladen, hvilket vi gør - 3.45 meter (på det højeste punkt). Vi ville også skulle finde ud af hvor meget en gennemsnittelig båd og kano stikker op over vandet og hvor meget af kroppen, der ville stikke op over båden/kanoen. Det ville også komme an på hvor der blev sejlet under.
5. Udvælg nogle af spørgsmålene, oversæt dem til matematik og besvar dem

Vi har udvalgt spørgsmål 2 og 4.

**Spørgsmål 2 - Hvad kostede materialerne?**

For at finde ud af hvor meget materialerne kostede, søgte vi på nettet. [[1]](#footnote-1)Vi fandt noget trykimprægneret træ med målene . Det koster 92 kr. pr stykke.

Vi ville bruge x stykker træ, for at vi har en :

*Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

Det vil sige at prisen pr. kubikmeter er

For at bygge broen skal man bruge 129 træplader og 342 træstolper. Rumfanget pr. træplade:

Rumfanget for alle 129 træplader:

Rumfanget pr. træstolpe:

Rumfanget for alle 342 træstolper:

Samlet rumfang for stolper og pladeer:

Fordi træet koster 3993 kr. pr. koster alt træet:

Træet vi fandt på nettet var ret dyrt, og der er ingen garanti for prisen på det træ, som er anvendt i broen er nogenlunde det samme. Derfor eksisterer der en stor usikkerhed omkring vores bud på 14780 kr.

**Vores bud på hvor meget træet på broen kostede er 14780 kr.**

**Spørgsmål 4 - Er der nok plads til at en båd kan sejle under broen? En kano?**

Vi ved allerede, at der er 3.45 meter fra broen til havoverfladen (hvor broen er højest). Det vil i princippet sige, at alt under 3.45 vil kunne komme under broen

# Konklusion

Vi fik, vha. analytisk plangeometri, regnet på 2 forskellige broer. Vi fandt bl.a. frem til at længden af vejlinjen over Alssundbroen er ca. 2800 meter.

-         En kort og overskuelig opsummering af de opnåede resultater

     (svarene på de spørgsmål du stillede i problemformuleringen).

- Vurdering og kritik af resultaterne og metoderne der er brugt

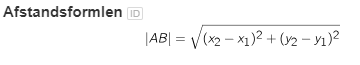
-         Gerne udbygget med en vurdering af konsekvenserne af

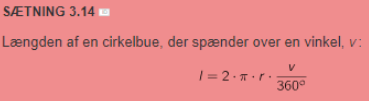
     rapportens resultat (fører svarene nye spørgsmål med sig).

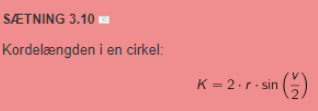
  Denne rapport indeholder besvarelser på en række spørgsmål om broer. I opgave 1 regner vi på Alssundbroen, og i opgave 2 regner vi på en bro over Aarhus Å. Formål med rapporten er at anvende analytisk plangeometri til at besvare de givne spørgsmål.

Vi vil bl.a. opstille ligninger, længder og koordinatsæt til dele af broer. Med dette menes at vi vil opstille ligninger og radius for cirkler til broer, bestemme koordinatsæt til punkter på broer, bestemmer længder på broers sider med mere.

# Formeloversigt





# Litteraturliste

*Kapitel 3 & 4 - ”Geometri og Trigonometri” og ”Analytisk Plangeometri” i ”MAT B htx (Læreplan 2017)”*

1. <https://www.silvan.dk/ft-colourshade-terrassebraedde-sort-32x150x4800mm?id=7710-9839082> [↑](#footnote-ref-1)